Parmi les nombreuses définitions mathématiques du chaos, j'ai choisi d'exposer celle s'appuyant sur la théorie de l'entropie topologique, qui **mesure la complexité** de la dynamique d'un système. La théorie est riche mais malheureusement, nous ne présenterons que des résultats élémentaires.

Précisons tout d'abord le cadre mathématique dans lequel on se place. Soit un espace métrique compact E, $f : E \to E$ une application continue, qui représente la loi d'évolution d'un **système dynamique discret** sur l'**espace des phases** E. Partant d'un **état initial** x_0, on peut construire ses itérés par f : $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots$; $f^n(x_0)$ est l'état du système « à l'instant n ». Nous utiliserons aussi la distance sur E : $d_{n,f}(x,y) = \max_{0 \leq j < n} d(f^j(x), f^j(y))$. E muni de cette distance reste compact.

1 Comment mesurer la complexité d'un système dynamique ?

1.1 Un système est complexe lorqu'il est difficile d'approximer son comportement

Nous dirons qu'un ensemble d'états initiaux est caractéristique si la connaissance de l'évolution du système pendant une durée n à partir de chacun de ces points permet d'approximer raisonnablement l'évolution à partir de n'importe quel état initial. Le système sera d'autant plus complexe que le nombre minimum de points caractéristiques nécessaires pour avoir **une bonne approximation** sera élevé.

Formalisons cette définition. Soit $\varepsilon > 0$. On dit qu'un sous-ensemble A de E est (n, ε) **couvrant** pour f si $\bigcup_{x \in A} B_{n,f}(x, \varepsilon) = E$ (boules ouvertes pour $d_{n,f}$). Soit $r(n, \varepsilon, f)$, cardinal minimal d'une telle partie. On en mesure la vitesse de croissance exponentielle avec n : $h(\varepsilon, f) = \limsup_{n\infty}(\frac{1}{n} \ln r(n, \varepsilon, f))$ et $h(f) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} h(\varepsilon, f)$. h est l'entropie de f. $h(\varepsilon, f) < \infty$ et la limite existe car $h(\varepsilon, f)$ est une fonction décroissante d'ε.

1.2 Un système est complexe lorqu'il disperse des états proches

C'est l'idée intuitive de la **sensibilité aux conditions initiales**. Si l'on compte le nombre maximum de points dont les orbites ne restent pas collées pendant un temps n, et que l'on étudie la vitesse de croissance de cette quantité par rapport à n, on dispose d'une mesure du **caractère dispersif** du système.

On formalise cette nouvelle approche par de la façon suivante : un sous-ensemble A de E est dit (n, ε) **séparé** pour f si $\forall (x, y) \in A^2, x \neq y$, $d_{n,f}(x, y) \geq \varepsilon$ et l'on considère $s(n, \varepsilon, f)$, cardinal maximal d'une telle partie. En fait cette quantité est liée à $r(n, \varepsilon, f)$ par l'encadrement $s(n, 2\varepsilon, f) \leq r(n, \varepsilon, f) \leq s(n, \varepsilon, f)$. On peut alors définir $h_{sep}(\varepsilon, f) = \limsup_{n\infty}(\frac{1}{n} \ln s(n, \varepsilon, f))$ et dans la définition de $h(f)$, on peut remplacer $h(\varepsilon, f)$ par $h_{sep}(\varepsilon, f)$ sans en changer la valeur. Cette deuxième définition permet par exemple de montrer immédiatement que si $F \subset E$ est un fermé stable, alors $h(f_{|F}) \leq h(f)$.

1.3 Une application est dite chaotique si son entropie est non nulle

Une entropie positive impose une démultiplication exponentielle du nombre d'orbites visibles à chaque itération.

2 Entropie et conjugaison : l'invariance de l'entropie

$g : F \to F$ est semi-conjuguée à $f : E \to E$ si $g \circ \Psi = \Psi \circ f$ où Ψ est continue surjective. On a alors : $h(f) \geq h(g)$. Si Ψ est injective, on dit que f et g sont conjuguées ; on a alors : $h(f) = h(g)$. Nous traduisons cette propriété en disant que l'entropie est un invariant topologique (et cela justifie le nom d'entropie topologique ; d'ailleurs, il en existe une définition purement topologique).

3 Exemples de calcul

- Les applications **1-Lipschitziennes** ont une entropie nulle.
- On prouve facilement que $h(f^k) = |k|h(f)$ si $k \in \mathbb{N}$ ($k \in \mathbb{Z}$ si f est bijective). Le point précédent s'étend ainsi aux applications ayant une itérée 1-Lipschitzienne.
- L'**application doublement des angles** (*doubling map*), définie sur $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la distance naturelle par $x \mapsto 2x$ est un exemple classique de **sensibilité aux conditions initiales** : son entropie est $\ln 2$.
- L'**application logistique** $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$, dans le cas $\mu > 2+\sqrt{5}$, a une entropie $\ln 2$ sur l'ensemble $\Lambda = \{x \backslash \forall n \in \mathbb{N},\ f_\mu^n(x) \in [0,1]\}$ (qui est un ensemble de Cantor).

Il n'existe pas de méthode générale pour calculer l'entropie d'une application. On utilise souvent l'invariance pour se ramener à des fonctions plus simples (souvent des décalages dans le cadre de la **dynamique symbolique**). D'autre part, de puissants théorèmes existent. Citons en deux. Le premier dit que l'on peut restreindre l'application à son **ensemble de points non-errants** (*non wandering set*) $\Omega = \{x \in E \backslash \forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists n \in \mathbb{N}^\star \backslash\ f^n(V) \cap V \neq \emptyset\}$ qui est un fermé stable, sans en changer l'entropie. Le deuxième dit que si l'on impose à Ψ, dans la définition de la semi-conjugaison, d'avoir au plus C éléments dans chaque fibre, C fixé, alors il y a en fait égalité $h(f) = h(g)$.

On peut aussi envisager une tentative de **calcul numérique** (très) approché de l'entropie d'une application sur un segment réel. J'ai réalisé une fonction CAML réalisant cette tâche. Les résultats sont assez bons.

Références

[1] C. Robinson. *Dynamicals Systems : Stability, Symbolic Dynamics and Chaos* ; CRC Press, 1995

[2] R. Devaney. *An introduction to Chaotic Dynamical Systems* ; Addison-Wesley, 1989

[3] article de Banks, Brooks, Cairns, Davis et Stacey ; American Monthly, avril 1992

[4] article Chaos de Encyclopædia Universalis

[5] C. Hillman, *Entropy in Ergodic Theory and Dynamical Systems* ;
`http://www.math.washington.edu/~hillman/Entropy/dynsys.html`

[6] M. Pollicott and M. Yuri, *Dynamical Systems and Ergodic Theory* ;
`http://www.maths.warwick.ac.uk/~mp/lectures.html`